CO3121 - Introducción al Cálculo de Probabilidades (Semanas 1, 2 y 3)

Raúl Jiménez, Haydee Lugo y Adolfo Quiroz
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Universidad Simón Bolívar

1 Espacios de Probabilidad

Muchos de los acontecimientos que suceden a diario no pueden ser predeterminados. Por ejemplo, ¿cual será el precio del barril de petróleo?, ¿lloverá o no?. Este tipo de acontecimientos se denominan **experimentos aleatorios**. Los juegos de azar nos brindan ejemplos clásicos de experimentos aleatorios.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es llamado **espacio muestral** y comunmente denotado por la letra Ω.

Otros conjuntos de posibles resultados, que sean de interés para el análisis de un experimento aleatorio, son llamados **eventos** y comunmente denotados por letras mayúsculas.

La clase $\mathcal{F}$ de todos los eventos o conjuntos de interés debe tener ciertas propiedades razonables:

El espacio muestral es un evento o conjunto de interés,

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{1}$$

Si un conjunto es de interés su complemento también lo es,

$$\text{si } \ A \in \mathcal{F} \ \text{ entonces } \ A^c \in \mathcal{F} \tag{2}$$

La unión de una colección contable de eventos es un evento,

$$\text{si } \ A_1, A_2, \ldots \ \text{ son eventos de } \mathcal{F} \ \text{ entonces} \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F} \tag{3}$$

Una clase de eventos que satisface (1), (2) y (3) se denomina σ**-álgebra**.

Es fácil comprobar que si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra entonces cumple propiedades tales como:

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

$$\text{Si} \quad A, B \in \mathcal{F} \quad \text{entonces} \quad A - B \in \mathcal{F}$$

$$\text{Si} \quad A_1, A_2, \ldots \quad \text{son eventos de } \mathcal{F} \quad \text{entonces} \cap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$$

En general $\mathcal{F}$ es cerrada bajo operaciones numerables de conjuntos.

Uno de nuestros objetivos es **medir el chance** de los eventos asociados a un experimento aleatorio: ¿cual es el chance de que llueva?, ¿cual es el chance de que el precio del petróleo baje?, ¿cual es el chance de ganar un juego de poker?.

Una **medida de probabilidad** es una función que asigna a cada evento el chance o **probabilidad** que tiene de ocurrir al observar un experimento aleatorio. Si asignamos a los eventos que no tienen chance de ocurrir probabilidad 0 y a los eventos que tienen chance seguro de ocurrir probabilidad 1, entonces una medida de probabilidad es una función $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ que debe satisfacer las siguientes propiedades:

$$P(\Omega) = 1, \tag{4}$$

Si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos disjuntos de $\mathcal{F}$, es decir si $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, entonces

$$P(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} P(A_n) \tag{5}$$

Esta última propiedad es conocida como σ**-aditividad** y natural exigírsela a casi cualquier medida: área, volúmen, etc. Pensemos en que una medida debe permitir medir por particiones

A partir de (4) y (5) las siguientes propiedades pueden ser demostradas de manera directa:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$

4. Si $A \subset B$ entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$
5. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$ (Monotonía)
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Tres propiedades que se demuestran con un poco mas de trabajo son:

7. Para cualquier sucesión de eventos, no necesariamente disjuntos,
$$P(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n) \quad (\sigma - \text{subaditividad})$$
8. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión creciente de eventos, es decir, para cualquier n $A_n \subset A_{n+1}$, entonces
$$P(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_n P(A_n) \quad \text{(continuidad por la izquierda)}$$
9. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión decreciente de eventos, es decir, para cualquier n $A_{n+1} \subset A_n$, entonces
$$P(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_n P(A_n) \quad \text{(continuidad por la derecha)}$$

Dado un espacio muestral Ω, una σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω y una medida de probabilidad $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es llamada **espacio de probabilidad**.

2 Probabilidad Condicional e Independencia

A menudo tenemos información a priori acerca del resultado de un experimento, lo cual debe modificar el cálculo de las probabilidades de cada evento. Por ejemplo, la probabilidad de que el precio del barril de petróleo suba, si tenemos la información a priori de una posible guerra entre países árabes, debe ser mayor que si desconocieramos esta información. En general, si A y B son eventos y sabemos que B ocurrió, entonces con esta información la nueva probabilidad de A no puede ser $P(A)$, ya que A ocurre si y solo si $A \cap B$ ocurre, sugiriendo que la nueva probabilidad de A es proporcional a

$P(A \cap B)$. En particular, B es ahora un evento seguro, lo cual sugiere que la constante de proporcionalidad es $1/P(B)$.

Definición (Probabilidad Condicional). Si A, B son eventos y $P(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B se denota por $P(A|B)$ y se define por

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$$

Para cada evento A, $P(A|B)$ es un número positivo, es decir, la probabilidad condicional define una función de conjuntos $P(\cdot|B) : \mathcal{F} \to [0, \infty)$. Veamos que la probabilidad condicional es una medida de probabilidad

Proposición. La probabilidad condicional es una medida de probabilidad, es decir:

(i) Para todo evento A, $0 \leq P(A|B) \leq 1$

(ii) $P(\Omega|B) = 1$

(iii) $P(\cdot|B)$ es σ-aditiva.

La probabilidad condicional brinda una importante fórmula para el cálculo de probabilidades, cuando se tiene una partición apropiada del espacio muestral. Una partición de Ω es una sucesión de eventos $B_1, B_2, \ldots$ tal que

$$\text{para todo } i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{y} \quad \cup_{i \geq 1} B_i = \Omega$$

Fórmula de Probabilidad total: Sea $B_1, B_2, \ldots$ una partición del espacio muestral, tal que para todo $i \geq 1$, $P(B_i) > 0$. Entonces, para cualquier evento A

$$P(A) = \sum_{i \geq 1} P(A|B_i)P(B_i).$$

La aplicación de esta fórmula se basa en la apropiada escogencia de la partición, de manera que $P(A|B_i)$ sea sencillo de calcular. Comunmente esta fórmula simplifica engorrosos cálculos.

Ejemplo: Se tienen dos cajas. La primera tiene b_1 bolas blancas y r_1 rojas. La segunda caja tiene b_2 bolas blancas y r_2 rojas. Si se pasa una bola al azar de la primera caja a la segunda y luego se extrae un bola al azar de la segunda caja, ¿cual es la probabilidad de extraer una bola blanca?.

Con datos estadísticos, comunmente se tiene conocimiento acerca de $P(A|B)$, cuando en realidad se requiere conocer $P(B|A)$. La siguiente es una sencilla y poderosa fórmula conocida como fórmula de Bayes.

Fórmula de Bayes: Sea A y B eventos con probabilidad > 0, entonces

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior, ¿cual es la probabilidad de haber pasado una bola roja de la primera caja a la segunda caja cuando lo que se extrajo de la segunda caja fue una bola blanca?.

La noción de independencia probabilística es tomada de su significado cotidiano. ¿Cuando decimos que una pareja es independiente?, en general cuando el resultado de las acciones de uno no afecta en el resultado las acciones del otro.

En términos probabilísticos, diremos que dos eventos son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrecia del otro, es decir, A es independiente de B si

$$P(A|B) = P(A)$$

Para que la ecuación anterior esté bien definida, es necesario que $P(B) > 0$, en cuyo caso, podemos reescribir la ecuación como

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De aquí podemos observar que:

- La independencia es recíproca, esto es, si A es independiente de B entonces B es independiente de A.
- La condición $P(B)$ o $P(A) > 0$ no es requerida.

Definición (Independencia de Eventos). Decimos que el par de eventos A, B son independientes respecto a P si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

¿Como generalizar la noción de independencia de una pareja a una familia?. Para que una familia sea independiente, cualquier subgrupo debe serlo, no basta que sean independientes por pareja o por un subgrupo en particular.

Definición (Independencia de una Familia de Eventos). Decimos que la familia de eventos $\{A_i, i \in I\}$ es independiente si para cualquier $J \subset I$

$$P(\cap_{i \in J} A_i) = \Pi_{i \in J} P(A_i)$$

3 Espacios Equiprobables.

En muchos experimentos aleatorios; por ejemplo, en la mayoría de los juegos de azar; el cálculo de probabilidades se reduce a contar el número de elementos de un conjunto.

Denotemos por $|A|$ el número de elementos o **cardinal** del conjunto A. Si Ω es finito y todos los resultados del experimento tienen igual probabilidad de ocurrencia decimos que el espacio es **equiprobable**. En ese caso, la probabilidad de un resultado cualquiera del experimento debe ser $1/|\Omega|$, ya que $P(\Omega) = 1$. Así, la probabilidad de un evento A de un espacio equiprobable es

$$P(A) = |A|/|\Omega|.$$

A continuación, vamos a presentar dos esquemas elementales de conteo.

Variaciones y Permutaciones. Sean E y F dos conjuntos finitos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $E = \{1, 2, \ldots, p\}$ y $F = \{1, 2, \ldots, n\}$. Denotemos por I_n^p el número de funciones inyectivas que van de E a F. Claramente, si $p > n$ entonces $I_n^p = 0$. Si $p \leq n$, podemos construir una función inyectiva $f : E \to F$ usando el siguiente esquema recursivo:

Empezamos seleccionando $f(1)$ entre los n elementos pertenecientes a F. Una vez escogido $f(1)$, existe $n-1$ posibles escogencias para $f(2)$, ya que $f(2)$ debe diferir de $f(1)$ para que f sea inyectiva. Siguiendo este procedimiento, $f(i)$ puede ser escogido entre los $n-(i-1)$ elementos $F - \{f(1), \ldots, f(i-1)\}$. En total, tenemos $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ posibilidades para construir f.

En resumen, si $p \leq n$, el número de inyecciones de E a F es

$$I_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!},$$

siendo $n!$ el factorial de n, definido por

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

para $n \geq 1$ y $0! = 1$.

Varios problemas de conteo se reducen al calcular el número de funciones inyectivas entre dos conjuntos. Por ejemplo, ¿de cuantas maneras podemos colocar p bolas enumeradas en n cajas?. Otro problema típico es: ¿cuantos arreglos, o conjuntos ordenados, pueden construirse extrayendo, sin reposición, p elementos de un conjuntos con n elementos. La respuesta a ambas preguntas es I_n^p.

El caso especial $I_n^n = P_n = n!$ es comunmente interpretado como el total de **permutaciones** de n elementos, lo cual no es mas que el número de funciones biyectivas sobre un conjunto de n elementos.

Números Combinatorios. Sea F un conjunto con n elementos. ¿Cuantos subconjuntos de F con p elementos hay?.

Ya que un arreglo de p elementos de F $(x_1, x_2, ..., x_p)$ puede identificarse como una función inyectiva $f : \{1, \dots, p\} \to F$ definida por $f(i) = x_i$, el número de arreglos o subconjuntos ordenados de F con p elementos es I_n^p. Ahora, las $p!$ permutaciones del arreglo $(x_1, \dots, x_p)$ representan el mismo subconjunto de F. En consecuencia, el número de subconjuntos diferentes de F con p elementos es I_n^p dividido por el número $p!$ de permutaciones de un conjunto con p elementos. Así, si $p \leq n$, el número de subconjuntos de F con p elementos es

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

De la fórmula del binomio de Newton y de los cálculos anteriores podemos deducir, que el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n, ya que

$$\sum_{p=0}^{n}(\text{numero de subconjuntos con } n \text{ elementos}) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n.$$

Una propiedad útil de los números combinatorios es

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Otra, conocida como fórmula de Pascal, es

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Uno de los problemas mas clásicos en el cálculo de probabilidades, que se reduce a contar el número de elementos de un conjunto es el siguiente problema de muestreo sin reposición:

Tenemos una urna que contiene N_1 bolas negras y N_2 bolas rojas. Escogemos aleatoriamente n bolas de la urna ($n \leq N_1 + N_2$). ¿Cual es la probabilidad de escoger exactamente k bolas negras?

Claro está que si k es 0 o mayor que N_1 o n, la probabilidad de escoger k bolas negras es cero. Así que supondremos que $0 < k \leq \inf(N_1, n)$.

El conjunto Ω de todos los posibles resultados del experimento aleatorio es la familia de todos los subconjuntos ω de n bolas de las $N_1 + N_2$ bolas de la urna. Así,

$$|\Omega| = \binom{N_1 + N_2}{n}$$

Debemos contar los subconjuntos ω con k bolas negras y $n - k$ bolas rojas. Para formar tal conjunto debemos formar un conjunto de k bolas negras entre las N_1 bolas negras. Sabemos que hay $\binom{N_1}{k}$ posibilidades de hacer lo annterior. Para cada subconjunto de k bolas negras, debemos asociar un subconjunto de $n-k$ bolas rojas. Este conjunto lo formamos de entre las N_2 bolas rojas y hay $\binom{N_2}{n-k}$ maneras de hacerlo. Así que, si A es el evento que consiste en escoger k bolas negras y $n-k$ bolas rojas de entre $N_1 + N_2$ bolas en la urna,

$$|A| = \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$$

Finalmente la probabilidad de A es:

$$P(A) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$$

4 Primer Problemario.

1. Supongamos que $\Omega = A \cup B$ y $P(A \cap B) = 0.2$. Hallar:

   (a) El máximo valor posible para $P(B)$, de tal manera que se cumpla $P(A) \geq P(B)$.

   (b) $P(A^c)$, sabiendo que $P(B) = 0.7$

   (c) $P(A^c \cap B^c)$

2. Dado que: $\Omega = A \cup B \cup C$, $P(A) = P(B) = P(C) = p$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = q$ y $P(A \cap B \cap C) = z$. Hallar:

   (a) $P(A^c \cap B^c \cap C)$

   (b) $P((A \cap B \cap C)^c)$

   (c) $P(A \cup (B^c \cap C^c))$

   (d) $P((A \cap B)^c \cup C^c)$

3. Se sientan 4 personas, al azar, en 4 sillas que llevan sus nombres (una silla con cada nombre). ¿Que probabilidad hay de que alguna de las personas quede en la silla con su nombre?

4. La siguiente tabla contiene las probabilidades correspondientes a las intersecciones de los eventos indicados:

	B	B^c
A	0.4	0.2
A^c	0.15	0.25

   (a) Hallar $P(A \mid B)$

(b) Hallar $P(B \mid A)$

(c) Hallar $P(A^c \mid B)$

(d) Hallar $P(B^c \mid A)$

5. n personas se sientan al azar en una fila de 2n asientos. Hallar la probabilidad de que no queden 2 personas en sillas contiguas.

6. En el lanzamiento de un par de dados, encuentre la probabilidad de que:

   (a) La suma de los dados sea 7

   (b) La diferencia entre las caras sea mayor que tres.

7. Se lanza una moneda 8 veces, hallar la probabilidad de que:

   (a) se obtengan exactamente 5 caras,

   (b) se obtengan a lo sumo 4 sellos.

8. Las barajas de poker constan de 52 cartas (no incluimos los comodines), distribuidas como sigue: se tienen 4 pintas: corazón ($\heartsuit$), diamante ($\diamondsuit$), trébol ($\clubsuit$) y pica ($\spadesuit$). De cada pinta hay 13 cartas denominadas 1,2,...,10, J, Q y K. Se reparten al azar 5 cartas (una mano) a cada jugador. Hallar la probabilidad de que en una mano el jugador I reciba:

   (a) ninguna pica,

   (b) al menos 2 picas,

   (c) 3 cartas del mismo número (un *trío*) y otras dos cartas con números distintos al del trío y distintos entre sí. Por ejemplo, $\{3\heartsuit, 3\spadesuit, 3\clubsuit, 5\clubsuit, Q\diamondsuit\}$ es una mano incluída en el evento que nos interesa. $(\star)$[1]

9. La urna I contiene r bolas rojas y b blancas. La urna II contiene, inicialmente, una bola roja y una blanca. Se toma una bola al azar de la urna I y se pasa a la II, luego se extrae una bola al azar de la urna II y resulta ser blanca. Cúal es la probabilidad de que la bola pasada de la urna I a la II haya sido blanca?

[1] El símbolo $\star$ significa que el problema (o la parte indicada del mismo) es relativamente difícil, y puede considerarse opcional.

10. Las llamadas telefónicas a una empresa son recibidas por tres recepcionistas A, B y C, de tal manera que de las 200 llamadas recibidas en un día, 60 son atendidas por la recepcionista A, 80 por B y las restantes por C. La recepcionista A se equivoca al pasar la llamada en un 2% de las veces, la recepcionista B en un 5% y la C en un 3%. Hallar la probabilidad de que al pasar una llamada recibida en la empresa, ésta sea pasada al lugar equivocado

11. Una urna contiene inicialmente r bolas rojas y b blancas. Se extraen 5 bolas, una por una, al azar, sin remplazo.
    (a) Hallar la probabilidad de que la secuencia sea RBRBR (Primera Roja, Segunda Blanca,...).
    (b) Hallar la probabilidad de que la secuencia sea RRRBB. Compare con (a). Generalize.
    (c) Ahora se extraen al azar, una por una y sin remplazo, todas las bolas de la urna. Diga porque todas las secuencias de extracción tienen la misma probabilidad.
    (d) ¿Cual es la probabilidad de que la última bola extraída sea roja?

12. Un virus peligroso está presente en el 0.01% de la población nacional. Se tiene una prueba clínica para detectar la presencia del virus, y esta prueba es correcta en el 99% de los casos (: entre los portadores del virus, la prueba dá positivo el 99% de las veces y entre los no portadores dá negativo el 99% de las veces). Un individuo tomado al azar en la población, es sometido a la prueba y el resultado de esta es positivo. Al conocer el resultado de la prueba, ¿cual es la probabilidad de que este individuo sea realmente un portador del virus?. Comente sobre el valor de esta probabilidad.

13. Existen 2 caminos para ir de A hasta B, y 2 caminos para ir desde B a C. Cada uno de los caminos tiene probabilidad p de estar bloqueado, independientemente de los otros. Hallar la probabilidad de que haya un camino abierto de A a B, dado que no hay camino de A a C.

14. Se recibe un lote de 1000 artefactos, de los cuales 60 estan dañados. Para decidir si aceptamos o no el lote se seleccionan 200 artefactos al

azar, sin remplazo, rechazando el lote si más de 2 estan dañados. Hallar la probabilidad de aceptar el lote.

15. Consideremos una sucesión de experimentos independientes consistentes en el lanzamiento de dos dados. En este juego se gana si la suma de los dados es 7. Hallar:

    (a) la probabilidad de ganar por vez primera, en un intento posterior al 12do.

    (b) La probabilidad de haber ganado 2 veces en 20 intentos.

    (c) en 10 intentos, la probabilidad de haber ganado 3 ó más veces.

16. Una unidad de mantenimiento sabe que cada falla reportada tiene probabilidad 0.15 de ser falsa alarma. Si la unidad acepta 25 solicitudes de mantenimiento por día y solo dispone del tiempo para atender 20 fallas reales, determine: ¿Cual es la probabilidad de que todas las fallas reales sean atendidas?

17. Un estanque contiene 500 peces de los cuales 300 estan marcados. Un pescador logra sacar 50 peces. Hallar la probabilidad de que:

    (a) 20 de los peces esten marcados,

    (b) ninguno de los peces este marcado.

18. Un lector óptico falla en la lectura del código de barras, con una probabilidad de 0.01.

    (a) ¿Cual es la probabilidad de que el lector falle solo una vez en las primeras 10 lecturas?

    (b) ¿Cual es la probabilidad de que el lector no falle en las primeras 20 lecturas dado que en las primeras 10 lecturas, el lector no falló.

19. Un depósito guarda 1000 artículos, 100 de los cuales son defectuosos. Un ins-
    pector toma uno de los artículos al azar, y si no es defectuoso lo devuelve al lote. Sea N el número de inspecciones de objetos no defectuosos, que se realizan antes de encontrar el primer objeto defectuoso. Calcular la probabilidad de tener $25 \leq N \leq 60$.

20. En un colegio de Artes están matriculados 300 hombres y 700 mujeres. Se eligen 25 estudiantes al azar, hallar la probabilidad de que 15 ó más de los elegidos sean mujeres si:

    (a) el muestreo se hace con remplazo.

    (b) el muestreo se hace sin remplazo.

SOLUCIONES

Se incluyen soluciones completas para los problemas impares y el resultado para los problemas pares.

1. (a) Como $\Omega = A \cup B$, por la fórmula para la probabilidad de la unión de eventos no necesariamente disjuntos, tenemos $1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, de donde $P(A) + P(B) = 1.2$. Para no violar la condición $P(A) \geq P(B)$, el mayor valor que podemos asignar a $P(B)$ es 0.6.
   (b) Otra vez usamos $\Omega = A \cup B$, para decir que el conjunto universal puede escribirse como la unión de tres partes disjuntas:

   $$\Omega = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B). \tag{6}$$

   De las tres partes de Ω en (**??**), la única que no esta en A es $(B \setminus A)$ y, por lo tanto, en nuestro caso $A^c = \Omega \setminus A = B \setminus A$, y $P(A^c) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.5$.
   (c) Por la fórmula de De Morgan, $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \Omega^c = \emptyset$ y, por tanto $P(A^c \cap B^c) = 0$.

2. (a) $p - 2q + z$, (b) $1 - z$, (c) p, (d) $1 - z$.

3. Llamemos A_i, para $i = 1, \ldots, 4$, al evento <u>*La i-ésima persona ocupa su silla*</u>. Entonces el evento $A =$ <u>*Alguna persona ocupa su silla*</u>, satisface $A = \cup_{i=1}^{4} A_i$. Esta unión no es disjunta (las personas 1 y 2 pueden **ambas** quedar en sus sillas). Por lo tanto, para calcular $P(A)$ usamos la fórmula de inclusión-exclusión:

   $$P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \qquad (7)$$

Nota: En (**??**), la segunda suma es sobre los pares de índices (del 1 al 4) i, j, con $i < j$. Esto quiere decir que restamos $P(A_1 \cap A_2)$ pero no $P(A_2 \cap A_1)$. Es decir, cada par de índices se considera una sola vez, como subconjunto de $\{1, 2, 3, 4\}$, no como par ordenado. Entonces, la suma en el segundo término de (**??**) es de 6 sumandos. El mismo comentario vale para el tercer término, que resulta ser de 4 sumandos (y de hecho también para el cuarto).

El resultado del experimento *las personas se sientan al azar* puede ser descrito por una lista ordenada, (s_1, s_2, s_3, s_4), donde s_i es la silla ocupada por la i-esima persona. Por el enunciado, los s_i son distintos (no se vale sentarse en las piernas de otra persona) y son los naturales del 1 al 4. Entonces, hay 4! listas posibles y todas con la misma probabilidad (1/4!). El evento A_i corresponde a las listas en que $s_i = i$, que son 3! (los otros tres elementos pueden ocupar las tres sillas restantes en cualquier orden). Por lo tanto, $P(A_i) = 3!/4! = 1/4$, para cada i. El evento $A_i \cap A_j$ corresponde a las listas en que $s_i = i$ y $s_j = j$, que son solo dos listas, por lo que $P(A_i \cap A_j) = 2/4! = 1/12$. Similarmente, para $i < j < k$, $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = 1/4!$ y $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1/4!$. Sustituyendo en (**??**), nos queda

$$P(A) = 4 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{17}{24}.$$

4. (a) 40/55, (b) 4/6, (c) 15/55, (d) 2/6.

5. A los efectos del problema planteado, la identidad de las personas no interesa, y podemos decir que Ω consta de las $\binom{2n}{n}$ maneras de ocupar n asientos de los $2n$ disponibles. Sea A el evento *No hay dos personas en sillas contiguas*. Una asignación de sillas en A es la siguiente (en donde O significa silla ocupada y V silla vacia):

$$|O|V|O|V| \cdots |O|V|,$$

es decir, ocupamos las sillas impares. A partir de esta configuración, pueden obtenerse las otras en A como sigue: La persona en la i-ésima silla ocupada la movemos un puesto a la derecha y, para que no queden personas en sillas contiguas, todas las personas a su derecha también se corren un puesto a la derecha. Por ejemplo, para $i = 2$, queda la siguiente configuración

$$|O|V|V|O|V|\cdots|O|V|O|,$$

mientras que, para $i = 1$, quedan ocupadas las sillas pares. El total de nuevas configuraciones que podemos producir es n, pues i varía de 1 a n, y

$$P(A) = \frac{n+1}{\binom{2n}{n}},$$

una probabilidad bastante pequeña.

6. (a) 6/36, (b) 6/36.

7. (a) El principio de la multiplicación nos dice que hay, en total, 2^8 sucesiones de 8 C's y S's. Este es el número de resultados en nuestro espacio muestral. Por ser la moneda justa, todas estas sucesiones son igualmente probables. Para producir una sucesión con exactamente 5 C's, elegimos 5 de los 8 'puestos' de la sucesión, y en ellos colocamos la letra C. Esto podemos hacerlo de $\binom{8}{5}$ maneras. Por lo tanto la probabilidad pedida es

$$P(\text{exactamente 5 caras }) = \binom{8}{5}/2^8 = 7/32.$$

(b) El evento A=<u>*A lo sumo cuatro sellos*</u>, puede escribirse como $A = \cup_{i=0}^4 A_i$, donde A_i es el evento <u>*Exactamente i sellos*</u>. Nótese que esta unión <u>si</u> es disjunta (no podemos tener, al mismo tiempo, exactamente 2 sellos y exactamente 3 sellos). Por lo tanto $P(A) = \sum_{i=0}^4 P(A_i)$, y cada uno de los sumandos se calcula como en la parte (a) (recuerde, en particular, que $\binom{8}{0} = 1$). Así, obtenemos

$$P(A) = 2^{-8} \sum_{i=0^4} \binom{8}{i} = 163/256.$$

8.

$$(a)\ \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad (b)\ 1-\frac{\binom{39}{5}+\binom{39}{4}\binom{13}{1}}{\binom{52}{5}}$$

$$(c)\ \frac{13\times\binom{4}{3}\times\binom{12}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}.$$

9. Definamos algunos eventos de interés. B_1 representa el evento de extraer bola blanca de la urna I. R_1 corresponde a extraer bola roja de esa urna. Obviamente, B_1 y R_1 forman una partición. Llamemos B_2 al evento de extraer bola blanca de la urna II. Se pide $\Pr(B_1|B_2)$. Del enunciado tenemos:

$$\Pr(B_1)=\frac{b}{r+b},\ \Pr(R_1)=\frac{r}{r+b},\ \Pr(B_2|B_1)=\frac{2}{3},\ \Pr(B_2|R_1)=\frac{1}{3}.$$

El Teorema de Bayes, utilizando como partición B_1 y R_1, nos dá:

$$\Pr(B_1|B_2)=\frac{\Pr(B_1)\Pr(B_2|B_1)}{\Pr(B_1)\Pr(B_2|B_1)+\Pr(R_1)\Pr(B_2|R_1)}.$$

Sustituyendo todos los valores conocidos en esta ecuación, obtenemos

$$\Pr(B_1|B_2)=\frac{2b}{2b+r}.$$

10. 0.035

11. La urna contiene inicialmente $r+b$ bolas. Llamamos R_i al evento *Bola Roja en la i-ésima extracción*, y definimos similarmente B_i. Con esta notación, la secuencia $RBRBR$ corresponde al evento $R_1\cap B_2\cap R_3\cap B_4\cap R_5$ y por la fórmula de probabilidad condicional iterada, tenemos

$$P(RBRBR)=P(R_1)P(B_2\mid R_1)\dots P(R_5\mid R_1\cap B_2\cap R_3\cap B_4)$$
$$=\frac{r}{(r+b)}\frac{b}{(r+b-1)}\frac{r-1}{(r+b-2)}\frac{b-1}{(r+b-3)}\frac{r-2}{(r+b-4)}$$

Por el mismo procedimiento, tenemos $P(RRRBB)=$

$$=\frac{r}{(r+b)}\frac{r-1}{(r+b-1)}\frac{r-2}{(r+b-2)}\frac{b}{(r+b-3)}\frac{b-1}{(r+b-4)},$$

la misma probabilidad que en la parte (a). Observamos que al aplicar la fórmula de probabilidad condicional iterada para calcular la probabilidad de una secuencia de extracción, el denominador siempre será $(r+b)(r+b-1)\dots(r+b-m+1) = \mathcal{V}_m^{r+b}$ (*variaciones* de $r+b$ en m), donde m es el total de bolas extraídas, mientras que en el numerador, luego de reordenar, aparecen dos factores: $\mathcal{V}_s^r$, siendo s el número de bolas rojas en la secuencia considerada y $\mathcal{V}_t^b$, donde t es la cantidad de bolas blancas en la secuencia. Por lo tanto, la probabilidad de una secuencia dada solo depende de la cantidad de bolas rojas y blancas en la secuencia y no del orden de extracción. Ahora bien, en cualquier secuencia S de extracción de *todas* las bolas de la urna, aparecen r bolas rojas y b blancas, por lo que

$$P(S) = \frac{r!.b!}{(r+b)!}$$

Finalmente, el evento de que la última bola extraída sea roja, R_{r+b}, corresponde al evento *En una muestra sin remplazo, de r+b-1 bolas, se obtienen b blancas* (es decir, en $r+b-1$ extracciones han salido todas las bolas blancas y por lo tanto la última tiene que ser roja), cuya probabilidad calculamos mediante la fórmula para la distribución hipergeométrica:

$$\frac{\binom{r}{r-1}\binom{b}{b}}{\binom{r+b}{r+b-1}} = \frac{r}{r+b}.$$

12. $0.0098 \simeq 1\%$. Esta probabilidad puede sorprender un poco por lo baja. Lo que está ocurriendo es que la probabilidad de ser portador del virus es mucho menor que la probabilidad de error en la prueba y, por tanto, la inmensa mayoría de los positivos en la prueba van a ser falsos. Concluímos que, para este virus, una probabilidad de acierto del 99% en la prueba no es aceptable (es muy baja) y es necesario mejorar la prueba.

13. Escribimos $A \not\to B$ para denotar que no hay caminos abiertos de A a B y $A \to B$ cuando si los hay. La probabilidad pedida es $P(A \to B \mid A \not\to C)$. Para que ocurra $A \not\to B$ ambos caminos entre A y B deben estar bloqueados, por lo que:

$$P(A \to B) = P(B \to C) = 1 - p^2. \tag{8}$$

Del enunciado entendemos que para ir de A a C, es necesario pasar por B, por lo cual $A \not\to C = (A \to B \cap B \to C)^c$, y por la hipótesis de independencia,
$P(A \not\to C) = 1 - P(A \to B)P(B \to C) = 1 - (1-p^2)^2 = 2\,p^2 - p^4$.
Finalmente, notemos que el evento $A \to B \cap A \not\to C$ es el mismo que $A \to B \cap B \not\to C$, y al usar la fórmula de Bayes, resulta

$$P(A \to B \mid A \not\to C) = \frac{P(A \to B \cap B \not\to C)}{P(A \not\to C)} = \frac{(1-p^2)p^2}{2\,p^2 - p^4} = \frac{1-p^2}{2-p^2}.$$

14.

$$\frac{\binom{940}{200}}{\binom{1000}{200}} + \frac{60 \times \binom{940}{199}}{\binom{1000}{200}} + \frac{\binom{60}{2}\binom{940}{198}}{\binom{1000}{200}}$$

15. En cualquier lanzamiento de los dados tenemos

$$p = P(\text{suma de los dados es 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

A lo largo de los lanzamientos sucesivos (e independientes), esta probabilidad se mantiene constante, por lo cual tenemos una sucesión de ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p, y podemos usar la fórmula correspondiente a la distribución Binomial. Tenemos, así

$$P(\text{primer éxito mas allá del 12do intento}) =$$

$$= P(\text{perder en los primeros 12 intentos}) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{12} \simeq 0.112,$$

$$P(\text{ganar 2 veces en 20 intentos}) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \simeq 0.198$$

$$\text{y } P(\text{ganar 3 ó más veces en 10 intentos}) =$$

$$= 1 - P(\text{ganar 2 ó menos veces en 10 intentos})$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^9 - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 \simeq 0.225.$$

16. $1-\sum_{i=0}^{4}\binom{25}{i}(0.15)^i(0.85)^{25-i}$.

17. Podemos ver la captura de los 50 peces como un procedimiento de muestreo sin remplazo (el pescador no los regresa al estanque), de una población de 500 individuos (los peces), de los cuales 300 tienen una característica de interés (estar marcados). Usamos, entonces, la fórmula de probabilidad para la distribución hipergeométrica:

$$P(20 \text{ peces capturados están marcados}) = \frac{\binom{300}{20}\binom{200}{30}}{\binom{500}{50}}$$

$$\text{y } P(\text{ningún pez capturado está marcado}) = \frac{\binom{200}{50}}{\binom{500}{50}}$$

18. (a) 0.0914 (b) 0.904

19. Al tomar un artículo del lote al azar, la probabilidad de que sea defectuoso es $p = P(\text{defectuoso}) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$. Como el artículo no defectuoso es devuelto al lote para proseguir el experimento, la probabilidad p se mantiene constante entre los intentos sucesivos. $N+1$ es el número de inspecciones hasta encontrar el primer defectuoso, que podemos ver como el número de intentos hasta el primer *éxito* en ensayos Bernoulli independientes con la misma probabilidad p de éxito y, por tanto, la distribución de $N+1$ es Geo(p), es decir $P(N=n) = p(1-p)^n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces, usando la fórmula para la suma de una serie geométrica que aprendimos en la infancia, resulta

$$P(25 \leq N \leq 60) = \sum_{i=25}^{60} p(1-p)^i = \frac{p\left((1-p)^{25} - (1-p)^{61}\right)}{1-(1-p)} \simeq 0.0702$$

20. (a) $\sum_{j=15}^{25}\binom{25}{j}(0.7)^j(0.3)^{25-j}$, (b) $\sum_{j=15}^{25}\frac{\binom{700}{j}\binom{300}{25-j}}{\binom{1000}{25}}$.